Το θεώρημα της περιβάλλουσας (παρένθεση)

Δεδομένου του προβλήματος μεγιστοποίησης:

$\max_x f(x,r)$ υπό τον περιορισμό $g(x,r) = 0$

Η συνάρτηση Lagrange θα είναι: $L = f(x,r) - \lambda g(x,r)$

και η άριστη λύση θα είναι: $x^* = x(r)$

και αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση: $f^* = f(r)$

Σύμφωνα με το θεώρημα της περιβάλλουσας:

$$\boxed{\frac{\partial f^*}{\partial r} = \frac{\partial L(x,r)}{\partial r}}$$

Η ταυτότητα του Roy

Από την έμμεση συνάρτηση ωφέλειας:

$$\frac{\partial U^*\left(X^*\left(P_X,P_Y,I\right),Y^*\left(P_X,P_Y,I\right)\right)}{\partial P_X}=U_{X^*}\frac{\partial X^*}{\partial P_X}+U_{Y^*}\frac{\partial Y^*}{\partial P_X}$$

$$=\lambda P_X\frac{\partial X^*}{\partial P_X}+\lambda P_Y\frac{\partial Y^*}{\partial P_X}\qquad(1)$$

Από τον εισοδηματικό περιορισμό:

$$\frac{\partial I}{\partial P_X}=X^*+P_X\frac{\partial X^*}{\partial P_X}+P_Y\frac{\partial Y^*}{\partial P_X}$$

$$0=X^*+P_X\frac{\partial X^*}{\partial P_X}+P_Y\frac{\partial Y^*}{\partial P_X}\qquad(2)$$

$$(1)\text{ και }(2)\Rightarrow\frac{\partial U^*}{\partial P_X}=-\lambda X^*$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της περιβάλλουσας:

$$\frac{\partial U^*}{\partial I}=\frac{\partial L}{\partial I}=\lambda$$

$$\Rightarrow\frac{\partial U^*}{\partial P_X}=-\frac{\partial U^*}{\partial I}X^*\qquad\Rightarrow\boxed{X^*=-\frac{\partial U^*/\partial P_X}{\partial U^*/\partial I}}$$

Η ταυτότητα του Roy

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_X} = -X^* \frac{\partial U^*}{\partial I}$$

Μια αύξηση στην τιμή ενός αγαθού το οποίο αγοράζει ο καταναλωτής μειώνει την (μεγιστοποιημένη) ωφέλεια που αποκομίζει, σε μεγαλύτερο βαθμό, όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα που αγοράζει.

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνολικής δαπάνης του καταναλωτή

Ελαχιστοποίηση $P_X X + P_Y Y = I$ (1)

Περιορισμός $U^0 = U(X,Y)$ (2)

$$L = P_X X + P_Y Y - \lambda\left(U(X,Y) - U^0\right) \quad (3)$$

Συνθήκες 1ης τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial X} = P_X - \lambda \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda U_X = P_X \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_Y - \lambda \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda U_Y = P_Y \quad (5)$$

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\boxed{MRS_{X,Y} = -\frac{P_X}{P_Y}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(U(X,Y) - U^0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(X,Y) = U^0 \quad (6)$$

$$(4) \quad \lambda U_X = P_X$$

$$(5) \quad \lambda U_Y = P_Y$$

$$(6) \quad U(X,Y) = U^0$$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (X,Y και λ)

Λύση

$$X^* = X_H^*\left(P_X, P_Y, U^0\right)$$ Χικσιανή Συνάρτηση ***Ζήτησης*** του X

$$Y^* = Y_H^*\left(P_X, P_Y, U^0\right)$$ Χικσιανή Συνάρτηση ***Ζήτησης*** του Y (Αντισταθμισμένη συνάρτηση ζήτησης)

$$\lambda^* = \lambda^*\left(P_X, P_Y, U^0\right)$$

$$I = P_X X_H^*\left(P_X, P_Y, U^0\right) + P_Y Y_H^*\left(P_X, P_Y, U^0\right) = m\left(P_X, P_Y, U^0\right)$$

Συνάρτηση Δαπάνης

Το λήμμα του Shephard

Από την συνάρτηση δαπανών έχουμε:

$$\frac{\partial m\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X} = X_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right) + P_X\frac{\partial X_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X} + P_Y\frac{\partial Y_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X}$$

$$= X_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right) + \lambda U_X\frac{\partial X_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X} + \lambda U_Y\frac{\partial Y_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X}$$

Όμως: $U\left(X,Y\right)=U^0 \Rightarrow \dfrac{\partial U\left(X_H^*,Y_H^*\right)}{\partial P_X}=0$

$$\Rightarrow U_X\frac{\partial X_H^*}{\partial P_X}+U_Y\frac{\partial Y_H^*}{\partial P_X}=0$$

$$\frac{\partial m\left(P_X,P_Y,U^0\right)}{\partial P_X} = X_H{}^*\left(P_X,P_Y,U^0\right)$$

$$\max_{x,y} U(x,y)$$

έτσι ώστε

$$I = p_x x + p_y y$$

Δυαδικότητα

$$\min_{x,y} I(x,y)$$

έτσι ώστε

$$U = U(x,y)$$

Μαρσαλιανή ζήτηση

$$x^* = x(p_x, p_y, I)$$

$$y^* = y(p_x, p_y, I)$$

Χικσιανή ζήτηση

$$x^* = x(p_x, p_y, U)$$

$$y^* = y(p_x, p_y, U)$$

Ταυτότητα Roy

Λήμμα Shephard

Έμμεση συνάρτηση ωφέλειας

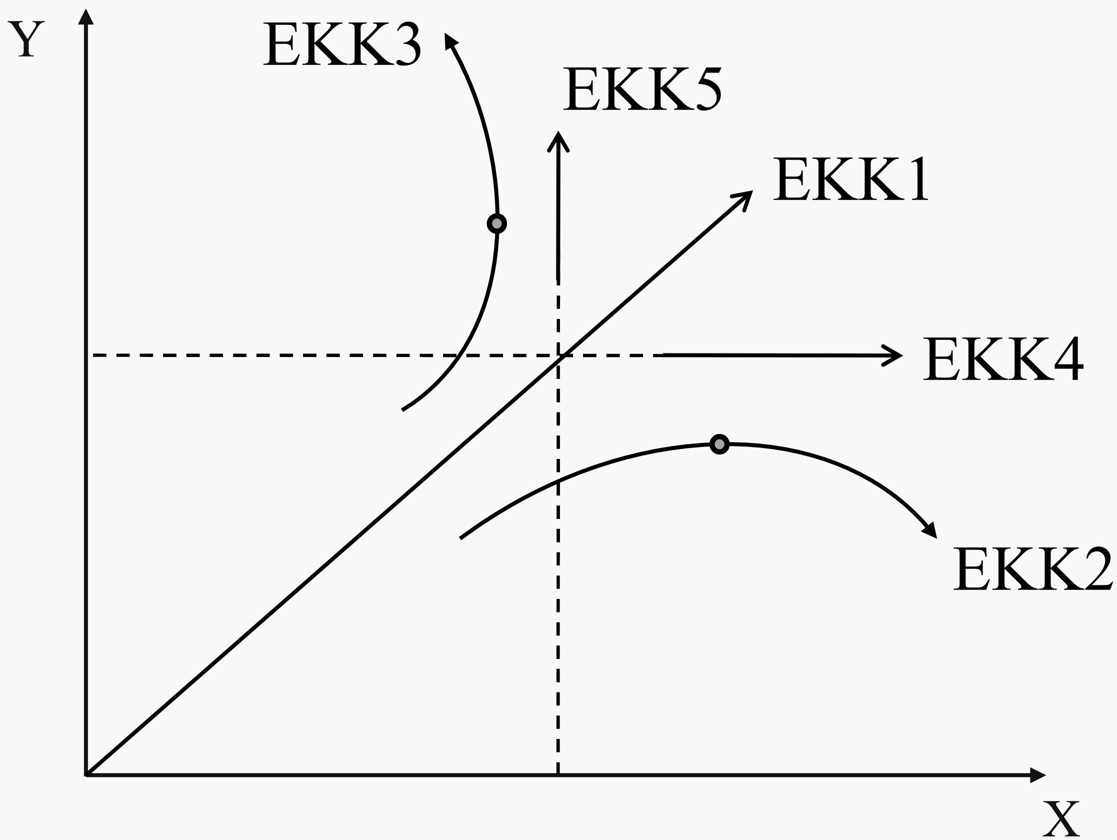
$$U^* = U(p_x, p_y, I)$$

Αντιστροφή

Συνάρτηση δαπάνης

$$\mathrm{I}^* = \mathrm{I}(p_x, p_y, U)$$

Χαρακτηριστικά εισοδηματικών καμπυλών κατανάλωσης



ΕΚΚ1: Κανονικά αγαθά
ΕΚΚ2: Το Y είναι κατώτερο
ΕΚΚ3: Το X είναι κατώτερο

ΕΚΚ4: Το Y είναι ουδέτερο
ΕΚΚ5: Το X είναι ουδέτερο